Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Решења задатака

Први разред – А категорија

1. Имамо $24^a + 2^b + 2018^c \equiv 3^a + 2^b + 2^c \pmod 7$ и $10^c + 3^a + 2018^b \equiv 3^c + 3^a + 2^b \pmod 7$. Дакле, пошто су оба ова броја дељива са 7, имамо $7 \mid (3^c + 3^a + 2^b) - (3^a + 2^b + 2^c) = 3^c - 2^c$. Приметимо да низ бројева $3^0, 3^1, 3^2, \ldots$ при дељењу са 7 даје редом остатке $1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3 \ldots$, док низ бројева $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$ даје редом остатке $1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2 \ldots$. Дакле, први низ остатака је периодичан са периодом дужине 6, а други са периодом дужине 3, па из првих 6 чланова ових низова можемо приметити да бројеви 3^c и 2^c дају исти остатак при дељењу са 7 једино када је c дељиво са 6, и тада оба броја дају остатак 1. Дакле, из $7 \mid 3^a + 2^b + 2^c$ сада следи $7 \mid 3^a + 2^b + 1$.

Даље, имамо $30^b + 3^c + 2018^a \equiv 2^b + 3^c + 2^a \equiv 2^a + 2^b + 1 \pmod 7$. Претпоставимо да је овај број дељив са 7. Тада $7 \mid (3^a + 2^b + 1) - (2^a + 2^b + 1) = 3^a - 2^a$, па као у претходном делу закључујемо да је a дељиво са 6 и да 3^a даје остатак 1 при дељењу са 7. Међутим, из $7 \mid 3^a + 2^b + 1$ тада закључујемо $2^b \equiv -2 \equiv 5 \pmod 7$, што није могуће (видели смо да су могући остаци 1, 2 и 4). Тиме је задатак решен.

2. Означимо $y = \overline{(a_{2017}+n)\ldots(a_2+n)(a_1+n)(a_0+n)}$. Јасно, цифра n није 0 и није 1.

Докажимо да је a_0 паран број. Претпоставимо супротно. Тада је x непаран број, па је, због $y = n \cdot x$, y паран број ако и само ако је n паран број. Међутим, $a_0 + n$ је различите парности од n, што је контрадикција. Дакле, a_0 је паран број, па су x и y парни бројеви. Одавде је и $a_0 + n$ паран број, па је и n паран.

Такође, $a_0 \neq 0$, јер је у супротном и цифра јединица броја y једнака 0, што није могуће. Дакле, $a_0 \geqslant 1$, па како је a_0 паран, следи $a_0 \geqslant 2$. Из $a_0 + n \leqslant 9$ имамо $n \leqslant 7$, па како је n паран, следи $n \leqslant 6$. Дакле, $n \in \{2, 4, 6\}$.

За $n = 6$, због $a_0 + n \leqslant 9$ добијамо $a_0 = 2$ и $a_0 + n = 8$. Међутим, цифра јединица броја $6 \cdot \overline{a_{2017}\ldots a_2 a_1 2}$ једнака је 2, а не 8.

За $n = 4$, због $a_0 + n \leqslant 9$ добијамо $a_0 = 2$ или $a_0 = 4$, и $a_0 + n = 6$ или $a_0 + n = 8$, респективно. Међутим, цифра јединица броја $4 \cdot \overline{a_{2017}\ldots a_2 a_1 2}$ једнака је 8, а броја $4 \cdot \overline{a_{2017}\ldots a_2 a_1 4}$ једнака је 6, па је и овај случај немогућ.

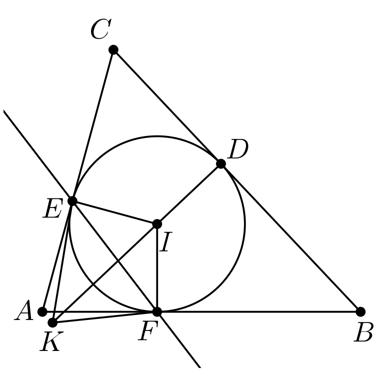
Дакле, остаје $n = 2$, и онда $a_0 \in \{2, 4, 6\}$. Упоређивањем цифре јединица броја $2 \cdot x$ и y закључујемо $a_0 = 2$. Сада из

$$2 \cdot \overline{a_{2017}\ldots a_2 a_1 2} = \overline{(a_{2017}+n)\ldots(a_2+n)(a_1+n)4}$$

следи

$$2 \cdot \overline{a_{2017}\ldots a_2 a_1} = \overline{(a_{2017}+n)\ldots(a_2+n)(a_1+n)}.$$

Даље на исти начин добијамо $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, итд. до $a_{2017} = 2$. Дакле, једино решење је $n = 2$ и $x = \underbrace{222\ldots222}_{2018 \text{ пута}}$.



Ок 2018 1А 3

3. Нека је I центар уписане кружнице. Имамо $\triangle KEF \sim \triangle ABC$, па добијамо $\measuredangle EKF = \measuredangle BAC = 180^\circ - \measuredangle EIF$, што значи да је четвороугао $EIFK$ тетиван. Следи $\measuredangle KIF = \measuredangle KEF = \measuredangle ABC = 180^\circ - \measuredangle DIF$, па су тачке K, I, D колинеарне, одакле следи тврђење.

4. Узмимо $A = \{a, b\}$. Тада имамо $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Приметимо да a не може бити једнако ни $\{a\}$, ни $\{a, b\}$: заиста, ако је n најмањи природан број такав да $a \in \mathscr{P}^n(\varnothing)$, тада имамо $\{a\}, \{a, b\} \notin \mathscr{P}^n(\varnothing)$, јер би из $\{a\} \in \mathscr{P}^n(\varnothing)$ (слично за $\{a, b\} \in \mathscr{P}^n(\varnothing)$) следило $\{a\} \subseteq \mathscr{P}^{n-1}(\varnothing)$, тј. $a \in \mathscr{P}^{n-1}(\varnothing)$, контрадикција са избором n. Дакле, да би важило $A \subseteq \mathscr{P}(A)$, следи да a мора бити $\varnothing$ или $\{b\}$, док (слично) b мора бити $\varnothing$ или $\{a\}$.

Претпоставимо прво $a, b \neq \varnothing$. Тада је једина могућност $a = \{b\}$ и $b = \{a\}$. Нека је n најмањи природан број такав да $a \in \mathscr{P}^n(\varnothing)$, тј. $\{b\} \in \mathscr{P}^n(\varnothing)$. Следи $\{b\} \subseteq \mathscr{P}^{n-1}(\varnothing)$, а одатле $b \in \mathscr{P}^{n-1}(\varnothing)$, што значи $\{a\} \in \mathscr{P}^{n-1}(\varnothing)$. Међутим, одатле на већ виђен начин добијамо $a \in \mathscr{P}^{n-2}(\varnothing)$, што је контрадикција са избором n.

Дакле, без умањења општости, $a = \varnothing$. Тада имамо $b \neq a = \varnothing$, па је једина преостала могућност $b = \{a\} = \{\varnothing\}$. Према томе, постоји јединствен скуп који задовољава услове задатка: $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

5. Побеђује Мина.

Означимо праве које Максим и Мина повлаче са $a_1, a_2, \ldots, a_{18}$, редом како се појављују у игри. Када Максим повуче праву a_1, Мина повлачи праву a_2 као произвољну праву паралелну са a_1. Даље, Мина у сваком свом потезу треба да повуче праву паралелну са a_1 и a_2, и то на начин који ће бити описан у наставку.

Наиме, тврдимо да Мина може своје праве повлачити на такав начин да се број различитих пресечних тачака након повлачење праве a_{2i+2} повећа за не више од $\max\{3i-2, 2i+1\}$ у односу на број након повлачења праве a_{2i}. Покажимо то.

Претпоставимо прво да Максимова права a_{2i+1} у пресеку с неком од ранијих Максимових правих осим a_1 образује нову пресечну тачку. Тада Мина своју праву a_{2i+2} треба да повуче тако да пролази кроз ту пресечну тачку (ако има више таквих пресечних тачака, онда кроз било коју од њих). Израчунајмо за колико се на тај начин повећао број различитих пресечних тачака током ова два потеза. Максимова права a_{2i+1} образује највише $2i$ нових пресечних тачака. Потом, Минина права a_{2i+2} не сече праву a_1, нити иједну од правих $a_2, a_4, \ldots, a_{2i}$ (јер је паралелна са свима њима); осим тога, будући да права a_{2i+2} пролази кроз пресечну тачку неке две Максимове праве, ни у пресеку праве a_{2i+2} с тим двема не добијамо нове пресечне тачке; дакле, Минина права a_{2i+2} може образовати нове пресечне тачке у пресеку с максимално $i-2$ Максимове праве, тј. може образовати максимално $i-2$ нових пресечних тачака. Дакле, укупан број новодобијених пресечних тачака током ова два потеза је не већи од $2i + (i-2) = 3i-2$.

Претпоставимо сада да Максимова права a_{2i+1} не образује нову пресечну тачку ни с једном од ранијих Максимових правих, осим евентуално a_1. Тада се након тог Максимовог потеза број различитих пресечних тачака повећао за не више од $i+1$ (нове пресечне тачке се могу добити у пресеку са свим Мининим правима, као и у пресеку са a_1). Тада Мина своју праву a_{2i+2} може повући произвољно (притом, наравно, паралелну са претходним својим правима), и она образује нове пресечне тачке максимално с Максимових i правих (све сем a_1), па је укупан број новодобијених пресечних тачака током ова два потеза не већи од $(i+1) + i = 2i+1$.

Тиме је најављено тврђење доказано. Остаје да избројимо колико се максимално различитих пресечних тачака добија на овај начин. За $i = 1, 2$ имамо $\max\{3i-2, 2i+1\} = 2i+1$, а за $i \geqslant 3$ имамо $\max\{3i-2, 2i+1\} = 3i-2$. Дакле, како после повлачења праве a_2 немамо ниједну пресечну тачку, и како се нове пресечне тачке добијају према показаним ограничењима, укупан број различитих пресечних тачака на крају игре је не већи од:

$$\sum_{i=1}^{8} \max\{3i-2, 2i+1\} = \sum_{i=1}^{2}(2i+1) + \sum_{i=3}^{8}(3i-2) = (3+5) + (7+10+13+16+19+22) = 95,$$

па побеђује Мина.

Други разред – А категорија

1. Одмах имамо услове $x \geqslant 1$ и $2x \geqslant a$. Трансформишемо једначину као $\sqrt{2x-a} = 2 + \sqrt{x-1}$ и квадрирамо, након чега остаје $2x - a = 4 + 4\sqrt{x-1} + x - 1$, тј. $x - (3+a) = 4\sqrt{x-1}$. Након још једног квадрирања, уз постављање услова $x \geqslant 3+a$, добијамо $x^2 - 2x(3+a) + (9+6a+a^2) = 16(x-1)$, тј. $x^2 - (22+2a)x + 25 + 6a + a^2 = 0$. Решавањем ове квадратне једначине добијамо:

$$x_{1,2} = \frac{22 + 2a \pm \sqrt{(484 + 88a + 4a^2) - (100 + 24a + 4a^2)}}{2} = \frac{22 + 2a \pm \sqrt{384 + 64a}}{2} = 11 + a \pm 4\sqrt{6+a}.$$

За $a < -6$ очигледно нема реалних решења, а за $a = -6$ добијамо једино решење $x = 5$, које задовољава услове дефинисаности. Треба за $a > -6$ проверити која решења задовољавају услове дефинисаности $x \geqslant 1$, $2x \geqslant a$ и $x \geqslant 3+a$. Први услов се своди на $11 + a \pm 4\sqrt{6+a} \geqslant 1$, тј. $10 + a \geqslant \mp 4\sqrt{6+a}$; после квадрирања добијамо $100 + 20a + a^2 \geqslant 96 + 16a$, тј. $a^2 + 4a + 4 \geqslant 0$, а ово је испуњено увек (јер је лева страна једнака $(a+2)^2$). Други услов се своди на $22 + 2a \pm 8\sqrt{6+a} \geqslant a$, тј. $22 + a \geqslant \mp 8\sqrt{6+a}$; после квадрирања добијамо $484 + 44a + a^2 \geqslant 384 + 64a$, тј. $a^2 - 20a + 100 \geqslant 0$, а ово је испуњено увек (јер је лева страна једнака $(a-10)^2$). Преостаје још трећи услов. Он се своди на $11 + a \pm 4\sqrt{6+a} \geqslant 3 + a$, тј. $8 \pm 4\sqrt{6+a} \geqslant 0$, и коначно $2 \pm \sqrt{6+a} \geqslant 0$. Увек важи $2 + \sqrt{6+a} \geqslant 0$, па једно решење имамо увек. Неједнакост $2 - \sqrt{6+a} \geqslant 0$ се (након пребацивања и квадрирања) своди на $4 \geqslant 6 + a$, тј. $a \leqslant -2$, па тада имамо и друго решење.

Дакле, резимирајмо:

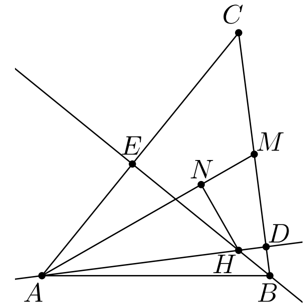
- за $a < -6$ нема реалних решења;
- за $a = -6$ једино решење је $x = 5$;
- за $-6 < a \leqslant -2$ имамо два решења, $x_{1/2} = 11 + a \pm 4\sqrt{6+a}$;
- за $-2 < a$ имамо једно решење, $x = 11 + a + 4\sqrt{6+a}$.

2. Нека је d број погођених, а n број промашених шутева током тренинга. Тада имамо $d - kn = k$, и по услову задатка важи

$$\frac{3}{4} < \frac{d}{d+n} = \frac{kn+k}{(k+1)n+k} < \frac{4}{5}.$$

Лева неједнакост даје $3(k+1)n + 3k < 4kn + 4k$, тј. $kn + k > 3n$, док десна неједнакост даје $4(k+1)n + 4k > 5kn + 5k$, тј. $kn + k < 4n$. Из друге неједнакости добијамо $k < 4$, тј. $k \in \{1, 2, 3\}$. У случају $k = 1$ прва неједнакост се своди на $n + 1 > 3n$, тј. $1 > 2n$, а ово је могуће само за $n = 0$, но за $n = 0$ друга неједнакост се своди на $k < 0$, контрадикција. У случају $k = 2$ прва неједнакост се своди на $2n + 2 > 3n$, тј. $n < 2$, а друга неједнакост се своди на $2n + 2 < 4n$, тј. $1 < n$, па опет имамо контрадикцију. Дакле, преостаје једино могућност $k = 3$.

3. Означимо странице датог троугла уобичајено са a, b и c, углове са α, β и γ, а полупречник описане кружнице са R. Нека је D подножје висине из темена A, а E подножје висине из темена B.



Ок 2018 2А 3

Важи $\triangle AHN \sim \triangle AMD$, одакле добијамо $\frac{AH}{AN} = \frac{AM}{AD}$, тј. $AN \cdot AM = AH \cdot AD$. Из услова $AN = 3MN$ добијамо $AN = \frac{3AM}{4}$, па уврштавајући ово у претходну једнакост закључујемо $3AM^2 = 4AH \cdot AD$. Како је AM тежишна дуж, за њу важи формула $AM^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$. Даље, имамо $AD = c\sin\beta = 2R\sin\beta\sin\gamma$ (где смо користили синусну теорему: $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$), као и $AH = \frac{AE}{\cos(90^\circ-\gamma)} = \frac{c\cos\alpha}{\sin\gamma} = 2R\cos\alpha$. Уврштавајући све ово у малопређашњу једнакост, добијамо

$$\frac{3}{4}(2b^2+2c^2-a^2) = 4(2R\cos\alpha)(2R\sin\beta\sin\gamma) = 16R^2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Приметимо сада:

$$\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma = \cos\alpha\frac{\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)}{2} = \frac{\cos\alpha(\cos(\beta-\gamma)-\cos(180^\circ-\alpha))}{2} = \frac{\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)+\cos^2\alpha}{2}$$

$$= \frac{\frac{\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)}{2}+1-\sin^2\alpha}{2} = \frac{\cos(180^\circ-2\gamma)+\cos(180^\circ-2\beta)+2-2\sin^2\alpha}{4}$$

$$= \frac{1-\cos2\gamma+1-\cos2\beta-2\sin^2\alpha}{4} = \frac{2\sin^2\gamma+2\sin^2\beta-2\sin^2\alpha}{4} = \frac{\sin^2\gamma+\sin^2\beta-\sin^2\alpha}{2},$$

те имамо

$$16R^2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma = 8R^2\sin^2\gamma+8R^2\sin^2\beta-8R^2\sin^2\alpha = 2(2R\sin\gamma)^2+2(2R\sin\beta)^2-2(2R\sin\alpha)^2 = 2c^2+2b^2-2a^2.$$

Према томе, можемо констатовати да важи једнакост $\frac{3}{4}(2b^2+2c^2-a^2) = 2c^2+2b^2-2a^2$, што се своди на $5a^2 = 2b^2+2c^2$. Одатле добијамо $AM^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4} = \frac{5a^2-a^2}{4} = a^2$, тј. $AM = BC$, што је и требало доказати.

4. Запишимо n у облику $n = p^k m$ за неки прост број p и природне бројеве k, m, где $p \nmid m$. Нека $d(m)$ означава број делилаца броја m. Тада n има тачно $d(m)$ делилаца који нису дељиви са p (то су управо делиоци броја m), као и $kd(m)$ оних који јесу (то су делиоци броја m помножени с неким степеном броја p не већим од k-тог). Пошто се у сваком пару из формулације задатка мора налазити бар један број који није дељив са p (у супротном би им и збир био дељив са p и притом већи од p, па збир не би могао бити прост број), следи $d(m) \geqslant kd(m)$, одакле добијамо $k = 1$. Дакле, n не може бити дељив ниједним квадратом простог броја. Приметимо још и да n мора бити паран број, јер би у супротном сви његови делиоци били непарни, па би, ма како их поделимо на парове, збир бројева у сваком пару био паран број, те не би могли сви ти збирови бити прости. Према свему томе, n мора бити облика $n = 2p_1p_2\cdots p_k$, где су $p_1, p_2 \ldots, p_k$ различити непарни прости бројеви.

Број n може бити у пару једино са бројем 1 (ако би био у пару било с којим другим својим делиоцем, њихов збир би био дељив тим делиоцем, па не би био прост). Даље, сваки од бројева $\frac{n}{p_i}$ је у пару са неким бројем који је узајамно прост с њим, што мора бити p_i. Слично закључујемо да је број $\frac{n}{p_ip_j}$ у пару са p_ip_j итд., тј. добијамо да сви парови морају бити облика $\{x, \frac{n}{x}\}$.

Претпоставимо да нека два пара имају исти збир, тј. $x + \frac{n}{x} = y + \frac{n}{y}$. Множећи обе стране са xy добијамо $x^2y + ny = xy^2 + nx$, тј. $xy(x-y) = n(x-y)$, а ово се своди на $(xy-n)(x-y) = 0$, одакле коначно добијамо $y = x$ или $y = \frac{n}{x}$; дакле, $\{x, \frac{n}{x}\} = \{y, \frac{n}{y}\}$, чиме је доказ завршен.

5. Најпре, све цифре мегапростог броја морају бити из скупа $\{2, 3, 5, 7\}$. Означимо скуп свих бројева са 2018 цифара и свим цифрама из скупа $\{2, 3, 5, 7\}$ са S. Нека је A скуп бројева из S који су дељиви са 5, B скуп парних бројева из S, а C скуп непарних бројева из S чији је збир цифара паран.

Имамо $|A| = |B| = 4^{2017}$, као и $|A \cap B| = |B \cap C| = 0$. Израчунајмо сада број елемената скупа C. Пошто су елементи скупа C непарни, као последња цифра долазе у обзир 3 могућности (цифре 3, 5 и 7). Пошто им је збир цифара паран, то значи да се међу првих 2017 цифара цифра 2 појављује паран број пута. Уз ове рестрикције, остале цифре можемо бирати произвољно. Дакле, $|C| = 3\sum_{k=0}^{1008}\binom{2017}{2k}3^{2017-2k}$. Приметимо да сабирци под сумом представљају управо сваки други сабирак из биномног развоја $(3+1)^{2017}$, па следи

$$|C| = 3\sum_{k=0}^{1008}\binom{2017}{2k}3^{2017-2k} = 3\cdot\frac{(3+1)^{2017}+(3-1)^{2017}}{2} = \frac{3(4^{2017}+2^{2017})}{2}.$$

Елементи из пресека $A \cap C$ су управо они бројеви из скупа C који имају 5 као цифру јединица. Одатле имамо $|A \cap C| = \frac{|C|}{3} = \frac{4^{2017}+2^{2017}}{2}$. Дакле, принципом укључења-искључења закључујемо

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap C| = 4^{2017} + 4^{2017} + \frac{3(4^{2017}+2^{2017})}{2} - \frac{4^{2017}+2^{2017}}{2} = 3\cdot4^{2017} + 2^{2017}.$$

Јасно, ниједан број из скупа $A \cup B \cup C$ није мегапрост.

Означимо са D скуп бројева из S који су дељиви са 3, а да притом нису у скупу $A \cup B \cup C$ (други услов се своди на то да се завршавају цифром 3 или 7, и да имају непаран збир цифара). Проценимо број елемената скупа D. Ако се међу првих 2016 цифара цифра 2 појављује непаран број пута, онда за претпоследње место имамо могућности 3, 5 или 7 (како би укупан збир цифара био непаран). Који год да остатак при дељењу са 3 даје збир првих 2016 цифара, увек можемо на два начина изабрати последњу и претпоследњу цифру (из скупа $\{3, 7\}$, односно $\{3, 5, 7\}$) на такав начин да укупан збир цифара (па тиме и посматрани број) буде дељив са 3. У овом случају, дакле, имамо

$$2 \sum_{k=0}^{1007} \binom{2016}{2k+1} 3^{2016-(2k+1)} = 2 \cdot \frac{(3+1)^{2016} - (3-1)^{2016}}{2} = 4^{2016} - 2^{2016}$$

бројева дељивих са 3. Ако се међу првих 2015 цифара цифра 2 појављује паран број пута а 2016. цифра је непарна, онда претпоследња цифра мора бити 2. Који год да остатак при дељењу са 3 даје збир првих 2015 цифара, увек можемо на два начина изабрати последњу цифру и цифру пре претпоследње (из скупа $\{3, 7\}$, односно $\{3, 5, 7\}$) на такав начин да укупан збир цифара (па тиме и посматрани број) буде дељив са 3. У овом случају, дакле, имамо

$$2 \sum_{k=0}^{1007} \binom{2015}{2k} 3^{2015-2k} = 2 \cdot \frac{(3+1)^{2015} + (3-1)^{2015}}{2} = 4^{2015} + 2^{2015}$$

бројева дељивих са 3. Дакле, можемо закључити

$$|D| \geqslant (4^{2016} - 2^{2016}) + (4^{2015} + 2^{2015}) = 5 \cdot 4^{2015} - 2^{2015}$$

(приметимо да нисмо исцрпли све могуће облике бројева из скупа D и стога не знамо тачан број елемената у скупу D, али и ова процена ће нам бити довољна). Јасно, ниједан број из скупа D није мегапрост.

Коначно, како важи $D \cap (A \cup B \cup C) = \varnothing$, имамо

$$|A \cup B \cup C \cup D| \geqslant (3 \cdot 4^{2017} + 2^{2017}) + (5 \cdot 4^{2015} - 2^{2015}) = 53 \cdot 4^{2015} + 3 \cdot 2^{2015},$$

те ова вредност представља доње ограничење за број елемената скупа S који нису мегапрости бројеви. Према томе, мегапростих бројева у скупу S може бити највише $4^{2018} - (53 \cdot 4^{2015} + 3 \cdot 2^{2015}) = 11 \cdot 4^{2015} - 3 \cdot 2^{2015} < 11 \cdot 4^{2015}$, што је и требало доказати.

Трећи разред – А категорија

1. Тражена вредност је највећа вредност реалног броја a за коју је неједнакост $\frac{x^2}{x-9} \geqslant a$ испуњена на целом интервалу $x \in (9, \infty)$. Приметимо да је највећа таква вредност a сигурно ненегативна, јер за $a = 0$ услов важи. Множењем са $x - 9$ (што можемо урадити јер је та вредност позитивна) и пребацивањем с десне стране на леву, посматрана неједнакост се своди на $x^2 - ax + 9a \geqslant 0$. Приметимо да је, за $x \leqslant 9$, последња неједнакост увек испуњена (леву страну можемо записати у облику $x^2 + a(9 - x)$, где су оба сабирка ненегативна), па је услов да она буде испуњена на интервалу $x \in (9, \infty)$ заправо еквивалентан услову да она буде испуњена за све $x \in \mathbb{R}$. Ово последње се своди на то да дискриминанта мора бити непозитивна, тј. $a^2 - 36a \leqslant 0$, или $a(36 - a) \leqslant 0$. Решење ове неједначине очигледно је $a \in [0, 36]$, па највећа могућа вредност броја a износи 36.

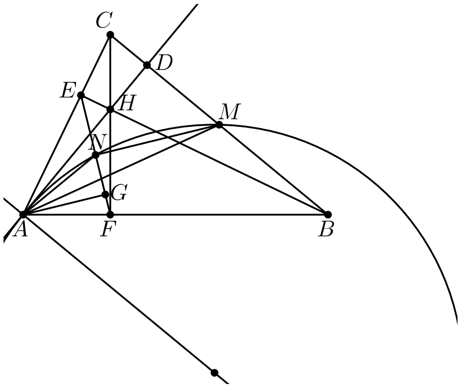
2. Уочимо, пре свега, да из постављене једначине следи $4 \mid x!$, одакле добијамо $x \geqslant 4$.

Претпоставимо прво да је $x+3$ сложен број. Тада, уколико би $x+3$ био дељив неким простим чиниоцем p, $p \geqslant 3$, имали бисмо $p \leqslant x$ (наиме, очигледно $x + 2 \nmid x + 3$, а за $x + 1 = p \geqslant 3$ опет имамо $x + 1 \nmid x + 3$); но, онда $p \mid x!$ али $p \nmid 4$, па p не дели леву страну једначине а дели десну, контрадикција. Дакле, уколико је $x + 3$ сложен број, тада $x + 3$ мора бити степен двојке. Но, тада је десна страна очигледно дељива са 8, док за $x \geqslant 4$ имамо $8 \mid x!$ и $8 \nmid 4$ па $8 \nmid x! + 4$, контрадикција.

Дакле, $x+3$ је прост број, рецимо p. Из постављене једначине имамо $x+3 \mid x!+4$, тј. $p \mid (p-3)!+4$. Из овог имамо $p \mid ((p-3)!+4)(p-2) = (p-2)!+4(p-2)$, а према верзији Вилсонове теореме добијамо $(p-2)!+4(p-2) \equiv 1+4\cdot(-2) = -7 \pmod p$; одатле следи $p = 7$, тј. $x = 4$. У том случају заиста налазимо решење:

$$4! + 4 = 28 = 4 \cdot 7 = 4 \cdot (4+3)^1,$$

тј. једино решење је пар $(x, y) = (4, 1)$.



Ок 2018 3А 3

3. Нека су AD и AG, редом, висине из темена A у $\triangle ABC$ и $\triangle AEF$, и нека је H ортоцентар у $\triangle ABC$. Користећи тетивност четвороугла $AFHE$, као и чињеницу да су $\measuredangle AHE$ и $\measuredangle ACB$ углови с нормалним крацима, добијамо $\measuredangle AFE = \measuredangle AHE = \measuredangle ACB$. Дакле, $\triangle ABC \sim \triangle AEF$, а при трансформацији сличности која пресликава први троугао у други, тачке M и D се пресликавају у N и G, редом. Осим тога, с обзиром на $ME = MF$ (кружница над пречником BC има центар у M и пролази кроз обе тачке E и F), имамо $MN \perp EF$, тј. $MN \parallel AG$. Следи $\measuredangle DAM = \measuredangle NAG = 180^\circ - \measuredangle ANM$, што значи да права AD додирује кружницу описану око $\triangle AMN$ (због везе међу углом између тетиве и тангенте и периферијским углом над том тетивом). Тврђење задатка одмах следи.

4. За $n = 2$ произвољан двочлан скуп испуњава услове задатка. Претпоставимо надаље $n > 2$.

Означимо $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Из првог услова имамо $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{S - a_1, S - a_2, \ldots, S - a_n\}$, па су онда и збирови елемената из ова два скупа једнаки. Добијамо $S = nS - S$, тј. $S(n-2) = 0$, одакле следи $S = 0$. Дакле, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{-a_1, -a_2, \ldots, -a_n\}$. Приметимо, ако за неко i, $1 \leqslant i \leqslant n$, важи $a_i = -a_i$, следило би $a_i = 0$, па можемо имати највише једно овакво i. Не губећи на општости, нека важи $a_1 = -a_2$. Тада имамо и $a_2 = -a_1$, па следи да почетни скуп бројева (с изостављеном нулом, у случају да 0 припада почетном скупу) можемо поделити у парове $\{x, -x\}$, $x \neq 0$.

Размотримо прво случај $n = 2k$, за $k \geqslant 2$. Тада имамо k парова облика $\{x_i, -x_i\}$, $x_i \neq 0$, за $i = 1, 2, \ldots, k$. Њих можемо поделити на два дисјунктна скупа $\{x_1, -x_1\}$ и $\{x_2, -x_2, \ldots, x_k, -x_k\}$, где важи $x_1^{n+1} + (-x_1)^{n+1} = 0 = x_2^{n+1} + (-x_2)^{n+1} + \cdots + x_k^{n+1} + (-x_k)^{n+1}$. Према томе, овакви n нису решења задатка због другог услова.

Размотримо сада случај $n = 2k+1$, за $k \geqslant 1$. Закључујемо да је један од посматраних бројева једнак 0, а остали чине парове како је горе констатовано. Задати скуп можемо поделити на два дисјунктна скупа $\{0, x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ и $\{-x_1, -x_2, \ldots, -x_k\}$, где важи $0^{n+1} + x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \cdots + x_k^{n+1} = (-x_1)^{n+1} + (-x_2)^{n+1} + \cdots + (-x_n)^{n+1}$. Према томе, ни овакви n нису решења задатка због другог услова.

Дакле, једино решење задатка је $n = 2$.

5. Нека је V скуп свих транзистора, E скуп свих водова, и нека xy означава вод између транзистора x и y (дакле, транзистори x и y су на посматраном чипу повезани водом ако и само ако важи $xy \in E$). Даље, означимо са $d(x)$ број водова који полазе из транзистора x, и $e = |E|$. Констатујмо једнакост (што ће бити потребно касније) $\sum_{u \in V} d(u) = 2e$: заиста, лева страна тачно убраја сваки вод по два пута (по једном за сваки крај), одакле следи констатација.

Према услову задатка, за свака два транзистора x и y таква да $xy \notin E$ имамо $d(x) + d(y) \geqslant n - 1$. Како оваквих парова транзистора има $\binom{n}{2} - e$, добијамо

$$\sum_{xy \notin E} (d(x) + d(y)) \geqslant \left(\binom{n}{2} - e\right)(n-1).$$

Приметимо да се, за сваки транзистор u, сабирак $d(u)$ на левој страни страни појављује онолико пута колико има транзистора с којима u није повезан, а то је $n - 1 - d(u)$. Дакле, имамо:

$$\sum_{xy \notin E} (d(x) + d(y)) = \sum_{u \in V} d(u)(n - 1 - d(u)) = (n-1)\sum_{u \in V} d(u) - \sum_{u \in V} d(u)^2.$$

Из последња два израза следи

$$\left(\binom{n}{2} - e\right)(n-1) \leqslant (n-1)\sum_{u \in V} d(u) - \sum_{u \in V} d(u)^2 \leqslant (n-1)\sum_{u \in V} d(u) - \frac{\left(\sum_{u \in V} d(u)\right)^2}{n} = 2e(n-1) - \frac{4e^2}{n}$$

(где друга неједнакост важи према неједнакости између квадратне и аритметичке средине).

Дакле, добили смо неједнакост

$$\frac{4e^2}{n} - 3e(n-1) + \binom{n}{2}(n-1) \leqslant 0.$$

Ово ћемо решавати као квадратну неједначину по e. Нуле се налазе у тачкама

$$\frac{3(n-1) \pm \sqrt{9(n-1)^2 - \frac{16}{n}\frac{n(n-1)}{2}(n-1)}}{\frac{8}{n}} = \frac{n\left(3(n-1) \pm \sqrt{(n-1)^2}\right)}{8},$$

тј. $\frac{n(n-1)}{2}$ и $\frac{n(n-1)}{4}$. Дакле, посматрана неједнакост важи за $e \in \left[\frac{\binom{n}{2}}{2}, \binom{n}{2}\right]$, што је и требало доказати.

Четврти разред – А категорија

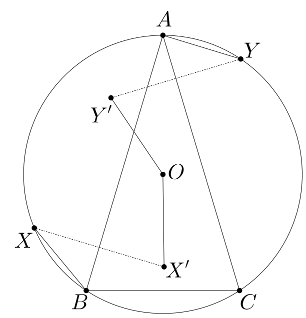
1. Уколико $2 \in S$, тада услов даје да бар један прост фактор броја $2 \cdot 2 + 1$ мора припадати скупу S, тј. $5 \in S$, а прост број 5 је облика $4k+1$. Претпоставимо сада да $2 \notin S$, и претпоставимо супротно од траженог: нека су сви прости бројеви из скупа S облика $4k+3$. Узмимо $p \in S$ произвољно. Према услову, бар један непаран прост фактор броја p^2+1 мора бити у скупу S. Докажимо да је сваки непаран фактор броја p^2+1 облика $4k+1$. Претпоставимо супротно: нека имамо $q = 4k+3$, $p^2+1 \equiv 0 \pmod{q}$. Тада важи $p^2 \equiv -1 \pmod{q}$, па и $p^{4k+2} = (p^2)^{2k+1} \equiv -1 \pmod{q}$; с друге стране, према малој Фермаовој теореми важи $p^{4k+2} = p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$, контрадикција. Тиме је доказ завршен. (Крај доказа се могао и мало скратити помоћу квадратних остатака: ако $q \mid p^2+1$, тада је -1 квадратни остатак по модулу q, одакле следи да је q облика $4k+1$.)

2. Претпоставимо да је x такав реалан број. Тада имамо $0 > \cos x - \cos 2x = 2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}$. Нека важи $\frac{x}{2} = r + 2k\pi$, за неко $k \in \mathbb{Z}$ и $r \in [0, 2\pi)$. У случају $\sin\frac{x}{2} > 0$ имамо $r \in (0,\pi)$, и будући да тада треба да важи $0 > \sin\frac{3x}{2} = \sin(3r+6k\pi) = \sin 3r$, следи $3r \in (\pi, 2\pi)$ (због $3r \in (0, 3\pi)$); све заједно, $r \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ у овом случају. У случају $\sin\frac{x}{2} < 0$ имамо $r \in (\pi, 2\pi)$, и будући да тада треба да важи $0 < \sin\frac{3x}{2} = \sin(3r+6k\pi) = \sin 3r$, следи $3r \in (4\pi, 5\pi)$ (због $3r \in (3\pi, 6\pi)$); све заједно, $r \in (\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ у овом случају.

Приметимо, $\sin x = \sin(2r+4k\pi) = \sin 2r$ и $\sin 3x = \sin(6r+12k\pi) = \sin 6r$. Знамо $2r \in (\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}) \cup (\frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3})$. У случају $2r \in (\frac{2\pi}{3}, \pi] \cup (\frac{8\pi}{3}, 3\pi]$, имамо $6r \in (2\pi, 3\pi] \cup (8\pi, 9\pi]$, и тада важи $\sin x = \sin 2r \geqslant 0$ и $\sin 3x = \sin 6r \geqslant 0$. У случају $2r \in (\pi, \frac{4\pi}{3}) \cup (3\pi, \frac{10\pi}{3})$, имамо $6r \in (3\pi, 4\pi) \cup (9\pi, 10\pi)$, и тада важи $\sin x = \sin 2r \leqslant 0$ и $\sin 3x = \sin 6r \leqslant 0$. Међутим, то (у оба случаја) значи $\cos 2x - \cos 4x = 2\sin x \sin 3x \geqslant 0$, тј. $\cos 2x \geqslant \cos 4x$, контрадикција с условом задатка.

Дакле, такав реалан број x не постоји.

3. Посматрајмо ротацију ρ око тачке O за $\measuredangle AOB$. Тада имамо $\rho : k \mapsto k, CA \mapsto AB$, а онда, због $\measuredangle XBA = \measuredangle YAC$, имамо и $\rho : Y \mapsto X$, па потом и $\rho : Y' \mapsto X'$. Одатле директно следи $OX' = OY'$.



Ок 2018 4А 3

4. Побеђује играч Б. Поделимо првих 2016 редова на хоризонталне домине. Када играч А упише цифру у неки од првих 2016 редова, играч Б упише у друго поље исте домине цифру која у збиру с управо уписаном цифром даје број дељив са 3. Када играч А упише цифру у неко поље у 2017. реду, играч Б упише цифру 2 у поље непосредно испод. На тај начин ће на крају игре бројеви у првих 2016 редова сви бити дељиви са 3, па неће бити прости; број у 2018. реду биће једнак $222\ldots222$, па ни он неће бити прост; бројеви у свакој колони ће се завршавати цифром 2, па ни они неће бити прости. Дакле, једино број у 2017. реду може бити прост, па побеђује играч Б.

5. Претпоставимо да се надовезивањем броја $k!$ иза броја $m!$ добија број $n!$. Јасно, $n \geqslant k+1$. Нека број $k!$ има тачно c цифара. Приметимо, $10^c > k$, што ћемо користити у наставку. Имамо

$$n! = m! \cdot 10^c + k!.$$

Претпоставимо прво $k \leqslant m$. Тада можемо обе стране поделити са $k!$, после чега остаје:

$$n(n-1)\cdots(k+2)(k+1) = m(m-1)\cdots(k+2)(k+1) \cdot 10^c + 1.$$

Десна страна је непарна, па мора бити и лева. То је могуће једино када се производ с леве стране састоји само од једног чиниоца, тј. $n = k+1$ (и то је уједно вредност на левој страни). Уколико би важило $m \geqslant k+1$, тј. уколико би производ с десне стране испред 10^c био непразан, десна страна би очигледно била већа од $k+1$, што је немогуће. Дакле, једино остаје $m = k$, чиме се једнакост своди на $k+1 = 10^c + 1$, тј. $k = 10^c > k!$, контрадикција. Према томе, овде не добијамо решење.

Претпоставимо сада $k > m$. Поново поделимо обе стране полазне једначине са $k!$, после чега остаје:

$$n(n-1)\cdots(k+2)(k+1) = \frac{10^c}{k(k-1)\cdots(m+2)(m+1)} + 1.$$

Разломак на десној страни мора бити цео број. За $k \geqslant m+3$ његов именилац би био дељив са 3, а како 10^c није дељиво са 3, ово је немогуће. Остаје $k = m+1$ или $k = m+2$. Посматраћемо ова два случаја засебно.

- $k = m+2$:
  Како $(m+1)(m+2) \mid 10^c$ а $m+1$ и $m+2$ су узајамно прости природни бројеви већи од 1, они морају бити степен двојке и степен петице у неком редоследу. За $m+2 = 2^a$ и $m+1 = 5^b$ имамо $2^a = 5^b + 1$; одмах видимо $a \geqslant 3$, но тада је лева страна дељива са 8 па би 5^b морало давати остатак 7 при дељењу са 8, док се заправо међу остацима броја 5^b при дељењу са 8 наизменично јављају само 5 и 1, контрадикција. Дакле, мора важити $m+2 = 5^a$ и $m+1 = 2^b$, и $5^a = 2^b + 1$. За $b \leqslant 2$ налазимо једно решење, $(a,b) = (1,2)$; тада следи $m = 3$ и $k = m+2 = 5$, но како број 6120 (надовезивање бројева 3! и 5!) није факторијал ниједног природног броја, овде

не добијамо решење. Претпоставимо сада $b \geqslant 3$. Тада десна страна даје остатак 1 при дељењу са 8, па мора и лева, одакле следи да је a паран број, рецимо $a = 2a_1$. Тада следи $2^b = 5^{2a_1} - 1 = (5^{a_1} - 1)(5^{a_1} + 1)$. Свака заграда мора бити степен двојке, а како се разликују за тачно 2, једина могућност је да буде $5^{a_1} - 1 = 2$, што није могуће.

- $k = m + 1$:
  Слично као и горе, мора бити $m + 1 \mid 10^c$. Претпоставимо прво $2^c \nmid m + 1$. Тада је $\frac{10^c}{m+1} + 1$ непаран број, па то мора бити и лева страна посматране једнакости, која износи $n(n-1)\cdots(m+3)(m+2)$. Ово је могуће само за $n = m+2$, тј. остаје $m+2 = \frac{10^c}{m+1} + 1$. Следи $(m+2)(m+1) = 10^c + (m+1)$, а одатле $(m+1)^2 = 10^c > k! = (m+1)!$, тј. $m + 1 > m!$. Одавде следи $m \leqslant 2$. За $m = 1$ имамо $k = 2$, а за $m = 2$ имамо $k = 3$, али како бројеви 12 и 26 нису факторијали ниједног природног броја, ни овде не добијамо решење.
  Претпоставимо сада $2^c \mid m + 1$. Тада имамо $m + 1 \geqslant 2^c$ и

$$(2^c)^{n-m-1} < n(n-1)\cdots(m+3)(m+2) = \frac{10^c}{m+1} + 1 \leqslant 5^c + 1,$$

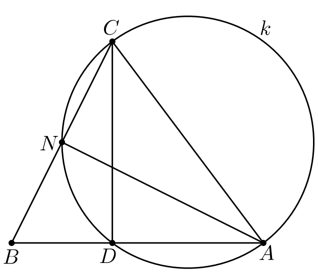
  па следи $n - m - 1 \leqslant 2$ (за $n - m - 1 \geqslant 3$ горња неједнакост би се свела на $8^c < 5^c + 1$, што је немогуће), тј. $n \leqslant m + 3$, а ово имплицира $n = m + 3$ или $n = m + 2$. Случај $n = m + 2$ смо решавали малопре и нисмо нашли решења. Остаје $n = m + 3$. Тада имамо

$$(m+3)(m+2) = \frac{10^c}{m+1} + 1 > \frac{k!}{m+1} + 1 = \frac{(m+1)!}{m+1} + 1 = m! + 1,$$

  тј. $m^2 + 5m + 5 > m!$. Ова неједнакост важи само за $m \leqslant 4$. Случајеве $m = 1$ и $m = 2$ смо испитали раније. За $m = 3$ имамо $k = 4$, а за $m = 4$ имамо $k = 5$, али како бројеви 624 и 24120 нису факторијали ниједног природног броја, опет не налазимо решење.

Дакле, природни бројеви m и k тражени у поставци не постоје.

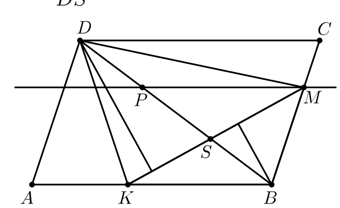
Први разред – Б категорија



Ок 2018 1Б 1

1. Нека је N средиште странице BC, уједно и пресек k са BC. Имамо $\measuredangle ANC = \measuredangle ANB = 90^\circ$, јер је AC пречник кружнице k. По ставу СУС имамо $\triangle ANC \cong \triangle ANB$, па следи $AB = AC = 60$. Сада имамо $60 = AD + DB = \frac{3}{2}DB + DB = \frac{5}{2}DB$, па следи $DB = 24$ и $AD = \frac{3}{2} \cdot 24 = 36$. Важи и $\measuredangle ADC = 90^\circ$ (поново јер је AC пречник), па сада из Питагорине теореме добијамо $CD = \sqrt{60^2 - 36^2} = 12\sqrt{5^2 - 3^2} = 48$. Како је CD висина на AB у $\triangle ABC$, његова површина износи $\frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{60 \cdot 48}{2} = 1440$.

2. *Прво решење.* Нека је S пресек дијагонале DB и дужи KM. Како $\triangle BKM$ и $\triangle DKM$ имају заједничку страницу KM, однос њихових површина заправо представља однос њихових висина спуштених на KM. Висине спуштене из B, односно D на KM односе се као SB и DS (према Талесовој теореми), па заправо треба наћи $\frac{SB}{DS}$.



Ок 2018 1Б 2

Означимо $\vec{x} = \overrightarrow{DC}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{DA}$. Сада из $\overrightarrow{DB} = \vec{x} + \vec{y}$ и $\overrightarrow{DS} = k\overrightarrow{DB}$ за неко k, $0 < k < 1$ (а онда $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DS} = (1-k)\overrightarrow{DB}$), имамо

$$\overrightarrow{DS} = k\vec{x} + k\vec{y}.$$

С друге стране, како је S на дужи KM, то за неки реалан број m, $0 < m < 1$, важи $\overrightarrow{DS} = m\overrightarrow{DK} + (1-m)\overrightarrow{DM}$. С обзиром на $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AK} = \vec{y} + \frac{2}{5}\vec{x}$ и $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM} = \vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y}$, уврштавањем овога у претходну једнакост добијамо

$$\overrightarrow{DS} = m\left(\vec{y} + \frac{2}{5}\vec{x}\right) + (1-m)\left(\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y}\right) = \left(\frac{2m}{5} + 1 - m\right)\vec{x} + \left(m + \frac{1-m}{3}\right)\vec{y} = \frac{5-3m}{5}\vec{x} + \frac{2m+1}{3}\vec{y}.$$

Дакле, следи $k\vec{x} + k\vec{y} = \frac{5-3m}{5}\vec{x} + \frac{2m+1}{3}\vec{y}$, па како су вектори $\vec{x}$ и $\vec{y}$ неколинеарни, мора важити $k = \frac{5-3m}{5}$ и $k = \frac{2m+1}{3}$. Одатле имамо $\frac{5-3m}{5} = \frac{2m+1}{3}$, тј. $15 - 9m = 10m + 5$, па израчунавамо $m = \frac{10}{19}$. Најзад, $k = \frac{2 \cdot \frac{10}{19} + 1}{3} = \frac{13}{19}$ и

$$\frac{P(\triangle BKM)}{P(\triangle DKM)} = \frac{SB}{DS} = \frac{1-k}{k} = \frac{\frac{6}{19}}{\frac{13}{19}} = \frac{6}{13}.$$

Друго решење. Као и у претходном решењу, тражимо $\frac{SB}{DS}$. Провуцимо кроз M праву паралелну са AB, и нека је P пресечна тачка те праве са BD. Посматрајући праве BD и BC, према Талесовој теореми имамо $\frac{MP}{CD} = \frac{MB}{CB} = \frac{2}{3}$, тј. $MP = \frac{2}{3}CD$, и $\frac{DP}{DB} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{3}$, тј. $DP = \frac{1}{3}DB$. Посматрајући праве BD и KM, према Талесовој теореми имамо $\frac{BS}{PS} = \frac{BK}{PM} = \frac{\frac{3}{5}AB}{\frac{2}{3}CD} = \frac{9}{10}$. Означимо $BS = 9x$ и $PS = 10x$. Имамо $BS + PS = BP = DB - DP = \frac{2}{3}DB$, тј. $19x = \frac{2}{3}DB$, па следи $x = \frac{2}{57}DB$. Одатле израчунавамо $BS = 9x = \frac{6}{19}DB$ и $DS = DB - BS = \frac{13}{19}DB$, па коначно

$$\frac{P(\triangle BKM)}{P(\triangle DKM)} = \frac{SB}{DS} = \frac{\frac{6}{19}DB}{\frac{13}{19}DB} = \frac{6}{13}.$$

3. Израчунајмо најпре укупан број тачкица на доминама на којима се јављају два различита броја. Посматрајмо све уређене парове различитих бројева од 0 до 9. Сваки број се на првој координати јавља тачно 9 пута (за све могуће вредности друге координате различите од тог броја), па збир свих првих координата износи $9 \cdot (0 + 1 + 2 + \cdots + 9) = 9 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 405$; слично, збир свих других координата износи такође 405, па збир свих бројева који се јављају у овим уређеним паровима износи 910. Приметимо да се домине на којима се јављају два различита броја могу представити управо оваквим уређеним паровима, при чему смо сваку домину на тај начин рачунали два пута (домину на којој су бројеви a и b рачунали смо и као пар (a, b), и као пар (b, a)); дакле, укупан број тачкица на оваквим доминама је тачно половина малопре израчунате вредности, тј. износи 405.

Укупан број тачкица на доминама на којима се с обе стране налази исти број износи $2 \cdot (0 + 1 + 2 + \cdots + 9) = 2 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 90$. Дакле, решење задатка је $405 + 90 = 495$.

4. У доказу користимо следеће једноставно запажање: ако су x и y природни бројеви такви да су x и xy кубови природних бројева, тада је и y куб природног броја.

а) Ако су ab и bc кубови природних бројева, тада је куб природног броја и $(ab)^2bc$, тј.a^2b^3c. Тада по запажању с почетка следи да је и a^2c куб природног броја.

b) С обзиром на $a^4b = a^3 \cdot ab$, а како су a^4b и a^3 кубови природних бројева, следи да је и ab куб природног броја. Слично, из $b^8c^5 = b^6c^3 \cdot b^2c^2$ добијамо да је b^2c^2 куб природног броја, а из $c^7a = c^6 \cdot ca$ добијамо да је ca куб природног броја (јер су b^8c^5 и b^6c^3, односно c^7a и c^6, кубови природних бројева). Сада из $ab \cdot b^2c^2 = ab^3c^2$ следи да је ab^3c^2 куб природног броја (јер су то оба чиниоца на левој страни), а онда је и ac^2 куб природног броја. Даље, како су ac и ac^2 кубови природних бројева, следи да је и c куб природног броја. Коначно, a је куб природног броја јер су c и ac кубови природних бројева, а b је куб природног броја јер су сада a и ab кубови природних бројева.

5. Претпоставимо прво $x \leqslant \frac{1}{3}$. Тада имамо $|3x - 1| = 1 - 3x$, па се једначина своди на

$$1 = |x - |2x - |3x - 1||| = |x - |2x - (1 - 3x)|| = |x - |5x - 1||.$$

За $x \leqslant \frac{1}{5}$ имамо $|5x - 1| = 1 - 5x$, па се једначина даље своди на $1 = |x - |5x - 1|| = |x - (1 - 5x)| = |6x - 1|$, тј. $6x - 1 = \pm 1$, а ово има решења $x = \frac{1}{3}$ и $x = 0$, од којих прво одбацујемо јер не испуњава услов $x \leqslant \frac{1}{5}$; за $x > \frac{1}{5}$ имамо $|5x - 1| = 5x - 1$, па се једначина даље своди на $1 = |x - |5x - 1|| = |x - (5x - 1)| = |1 - 4x|$, тј. $1 - 4x = \pm 1$, а ово има решења $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$, која оба одбацујемо јер нису у интервалу $\frac{1}{5} < x \leqslant \frac{1}{3}$.

Претпоставимо сада $x > \frac{1}{3}$. Тада имамо $|3x - 1| = 3x - 1$, па се једначина своди на

$$1 = |x - |2x - |3x - 1||| = |x - |2x - (3x - 1)|| = |x - |1 - x||.$$

За $x \leqslant 1$ имамо $|1 - x| = 1 - x$, па се једначина даље своди на $1 = |x - |1 - x|| = |x - (1 - x)| = |2x - 1|$, тј. $2x - 1 = \pm 1$, а ово има решења $x = 1$ и $x = -1$, од којих друго одбацујемо јер не испуњава услов $x > \frac{1}{3}$; за $x > 1$ имамо $|1 - x| = x - 1$, па се једначина даље своди на $1 = |x - |1 - x|| = |x - (x - 1)| = |1| = 1$, па су у овом случају решења сви бројеви који испуњавају услов $x > 1$.

Дакле, решења једначине су $x = 0$ и сви реални бројеви x за које важи $x \geqslant 1$.

Други разред – Б категорија

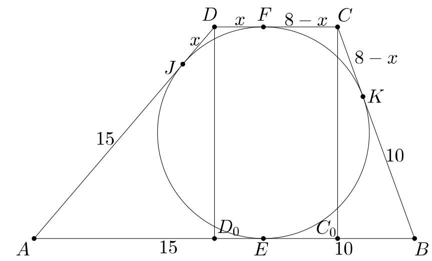
1. Приметимо да збир свих дозвољених цифара износи $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$. Пошто треба саставити четвороцифрен број од неких међу овим цифрама чији збир треба да износи 15, треба одбацити неке три цифре које имају збир 6. Очигледно, оне могу бити само нешто од: $\{0, 1, 5\}$, $\{0, 2, 4\}$ или $\{1, 2, 3\}$.

У првом случају можемо користити цифре $2, 3, 4, 6$, и њих можемо разместити на $4! = 24$ начина. У другом случају можемо користити цифре $1, 3, 5, 6$, и њих можемо разместити на $4! = 24$ начина. У трећем случају можемо користити цифре $0, 4, 5, 6$, а приликом њиховог размештања морамо пазити на то да 0 не сме бити на првом месту; дакле, за најлевљу цифру бирамо једну од $4, 5, 6$, а онда преостале три можемо разместити на $3! = 6$ начина, па у овом случају имамо укупно $3 \cdot 6 = 18$ бројева.

Дакле, решење задатка је $24 + 24 + 18 = 66$.

2. Нека кружница k додирује странице AD, CD и BC у тачкама J, F и K, редом. Нека су C_0 и D_0 подножја нормала из C и D на AB, редом.

Нека је r полупречник кружнице k. Означимо $x = DJ$. На основу једнакости тангентних дужи из тачке на кружницу, имамо $AJ = AE = 15$, $BK = BE = 10$, $DF = DJ = x$ и $CK = CF = 8-x$. Важи и $D_0E = DF = x$ и $C_0E = CF = 8-x$. Из Питагорине теореме примењене на $\triangle ADD_0$ и $\triangle BCC_0$ имамо $AD_0^2 + DD_0^2 = AD^2$ и $BC_0^2 + CC_0^2 = BC^2$, тј.



Ок 2018 2Б 2

$$(15-x)^2 + (2r)^2 = (15+x)^2$$

и

$$(10-(8-x))^2 + (2r)^2 = (10+(8-x))^2.$$

Прва једначина се своди на $225 - 30x + x^2 + 4r^2 = 225 + 30x + x^2$, тј. $4r^2 = 60x$, а одатле следи $x = \frac{r^2}{15}$. Друга једначина се своди на $4 + 4x + x^2 + 4r^2 = 324 - 36x + x^2$, тј. $40x + 4r^2 = 320$, а одатле следи $x = \frac{320-4r^2}{40} = \frac{80-r^2}{10}$. Дакле, важи $\frac{r^2}{15} = \frac{80-r^2}{10}$, што се своди на $10r^2 = 1200 - 15r^2$, а одатле израчунавамо $r = \sqrt{\frac{1200}{25}} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

3. Како $\sqrt{2019}$ није природан број ($44^2 = 1936 < 2019 < 2025 = 45^2$), следи да је број n^2 бар петоцифрен. Претпоставимо $n^2 = \overline{2019a}$. Како имамо $142^2 = 20164 < \overline{2019a} < 20449 = 143^2$, такво n не постоји. Претпоставимо сада $n^2 = \overline{2019ab}$, тј. $2019 \cdot 10^2 = 201900 \leqslant n^2 < 202000 = 2020 \cdot 10^2$. Одатле имамо $n \geqslant \sqrt{2019} \cdot 10 > 440$ и $n < \sqrt{2020} \cdot 10 < 450$, али онда испитивањем овог интервала у потрази за n које испуњава задате услове установљавамо $449^2 = 201601 < \overline{2019ab} < 202500 = 450^2$, па такво n не постоји. Претпоставимо сада $n^2 = \overline{2019abc}$, тј. $20190 \cdot 10^2 = 2019000 \leqslant n^2 < 2020000 = 20200 \cdot 10^2$. Одатле имамо $n \geqslant \sqrt{20190} \cdot 10 > 1420$ и $n < \sqrt{20200} \cdot 10 < 1430$. Сада испитивањем овог интервала у потрази за n које испуњава задате услове већ за $n = 1421$ добијамо $1421^2 = 2019241$.

Дакле, најмањи такав природан број n је $n = 1421$.

4. Постављена једначина је еквивалентна са $\sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2+a^2}} = a - x$. Одатле имамо услов $a \geqslant x$, а након квадрирања једначина се своди на $a^2 - x\sqrt{x^2+a^2} = a^2 - 2ax + x^2$, тј. $x\sqrt{x^2+a^2} = 2ax - x^2$. Једна могућност је $x = 0$ (што јесте решење кад год је испуњен услов $a \geqslant x$, тј. $a \geqslant 0$); иначе нам после скраћивања са x остаје $\sqrt{x^2+a^2} = 2a - x$, а ово се након квадрирања, уз постављање услова $2a - x \geqslant 0$, тј. $a \geqslant \frac{x}{2}$, своди на $x^2 + a^2 = 4a^2 - 4ax + x^2$, тј. $4ax = 3a^2$. У случају $a = 0$ ово је испуњено увек, тј. тада су решења сви бројеви x за које важи $a \geqslant x$ и $a \geqslant \frac{x}{2}$, тј. $x \leqslant 0$. Претпоставимо сада $a \neq 0$. Тада из последње једначине добијамо још решење $x = \frac{3a}{4}$; ово јесте решење полазне једначине ако су испуњени услови $a \geqslant x$ и $a \geqslant \frac{x}{2}$, тј. $a \geqslant \frac{3a}{4}$ и $a \geqslant \frac{3a}{8}$, а они се своде на $\frac{a}{4} \geqslant 0$ и $\frac{5a}{8} \geqslant 0$, тј. (поново) $a \geqslant 0$.

Дакле, резимирајмо: за $a = 0$ решење једначине је цео интервал $x \in (-\infty, 0]$, за $a > 0$ једначина има два решења, $x = 0$ и $x = \frac{3a}{4}$, а за $a < 0$ једначина нема решења.

5. Посматрајмо магични квадрат као на слици лево. Пошто важи $a + b + c + \cdots + i = 1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$ и $a + b + c = d + e + f = g + h + i$, следи $a + b + c = d + e + f = g + h + i = 15$, и такође збирови у свакој врсти и на обе дијагонале износе 15. Приметимо сада:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

2	9	4
7	5	3
6	1	8

$$60 = 4 \cdot 15 = (b+e+h) + (d+e+f) + (a+e+i) + (c+e+g) = (a+b+c+\cdots+i) + 3e = 45 + 3e,$$

Ок 2018 2Б 5

одакле следи $e = 5$.

Претпоставимо да је број 9 смештен у угао; без умањења општости, $a = 9$. Тада из $15 = a + b + c = a + d + g$ следи $b + c = d + g = 6$. Међутим, приметимо да два броја могу давати збир 6 само ако су то бројеви 2 и 4 (заиста, могућности 3+3 отпада јер бројеви морају бити различити, а могућност 1+5 отпада јер је број 5 већ искоришћен за e), па смо заправо добили контрадикцију.

Према томе, број 9 не може бити смештен у углу, па мора бити на средини неке странице. Узмимо нпр. $b = 9$. Тада слично као малопре добијамо $a + c = 6$, тј. $a = 2$ и $c = 4$ или обратно. Коју год од ове две могућности да одаберемо (а међусобно су аналогне), лако видимо да се остатак магичног квадрата може попунити на јединствен начин (на слици десно је приказано попуњавање за $a = 2$ и $c = 4$.

Дакле, у средини увек мора бити број 5, а затим број 9 можемо уписати на средину неке странице, што даје 4 могућности за број 9. Након уписивања броја 9, за његова два суседа имамо још избор који од њих ће бити 2 а који 4, што су још 2 могућности, а даље попуњавање магичног квадрата је једнозначно одређено. Према томе, различитих магичних квадрата 3×3 укупно има $4 \cdot 2 = 8$.

Трећи разред – Б категорија

1. Број парова различитих шахиста је $\frac{n(n-1)}{2}$, па како је свако са сваким одиграо по k партија, следи $\frac{n(n-1)}{2}k = 224$, тј. $n(n-1)k = 448 = 2^6 \cdot 7$. Међу бројевима n и $n-1$ један мора бити непаран, а једини непарни делиоци броја 448 су 1 и 7. Немогуће је $n = 1$, јер би тада производ на левој страни износио 0. За $n-1 = 1$ имамо $n = 2$ и тада $k = 224$, тј. на турниру су играла само двојица шахиста и одиграли су 224 партије. Случај $n = 7$ је такође немогућ јер тада имамо $n-1 = 6$, а десна страна није дељива са 3. Коначно, за $n-1 = 7$ имамо $n = 8$ и тада $k = \frac{448}{8\cdot 7} = 8$, тј. на турниру је играло 8 шахиста и свако је са сваким одиграо по 8 партија.

Дакле, могуће је $n = 2$ и $k = 224$, или $n = 8$ и $k = 8$.

2. Једначину трансформишемо у $\sin 3x - \sin x = 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, тј. $2\sin x \cos 2x = 2\sin^2 x$. Једна могућност је $\sin x = 0$, тј. $x = k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$. У случају $\sin x \neq 0$ после скраћивања са $2\sin x$ остаје $\cos 2x = \sin x$, тј. $1 - 2\sin^2 x = \sin x$. Уведимо смену $\sin x = t$. Тада добијамо квадратну једначину $2t^2 + t - 1 = 0$, а њена решења су $t_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1\pm 3}{4}$, тј. $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = -1$. Дакле, $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = -1$, тј. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ или $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$.

Преостаје још пребројати колико се од пронађених решења налази у интервалу $[2, 24]$. Због $0 < 2 < \pi$ и $7\pi < 24 < 8\pi$ имамо 7 решења облика $x = k\pi$ (за $1 \leqslant k \leqslant 7$). Даље, због $\frac{\pi}{6} < 2 < \frac{13\pi}{6}$ и $\frac{37\pi}{6} < 24 < \frac{49\pi}{6}$ имамо 3 решења облика $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ (за $1 \leqslant k \leqslant 3$). Затим, због $0 < 2 < \frac{5\pi}{6}$ и $\frac{41\pi}{6} < 24 < \frac{53\pi}{6}$ имамо 4 решења облика $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ (за $0 \leqslant k \leqslant 3$). Најзад, због $-\frac{\pi}{2} < 2 < \frac{3\pi}{2}$ и $\frac{15\pi}{2} < 24 < \frac{19\pi}{2}$ имамо 4 решења облика $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (за $1 \leqslant k \leqslant 4$).

Дакле, укупан број решења у траженом интервалу износи $7 + 3 + 4 + 4 = 18$.

3. Из прве једначине следи $b = 8 - a$, па уврштавањем овога у другу добијамо

$$32 = a^2 + (8-a)^2 + c^2 = a^2 + 64 - 16a + a^2 + c^2 = 2a^2 - 16a + 64 + c^2,$$

тј. $2a^2 - 16a + 32 + c^2 = 0$. Међутим, приметимо да леву страну можемо трансформисати као $2a^2 - 16a + 32 + c^2 = 2(a^2 - 8a + 16) + c^2 = 2(a-4)^2 + c^2$, па да би ово било једнако нули, мора важити $a - 4 = 0$ и $c = 0$. Дакле, једино решење задатог система је $a = 4$, $b = 8 - a = 4$ и $c = 0$.

4. *Прво решење.* Нека је O пресек дијагонала ромба $ABCD$, и нека је a његова страница. Означимо $\measuredangle SOA = \alpha$, $\measuredangle SOC = \pi - \alpha$, $\measuredangle SOB = \beta$, $\measuredangle SOD = \pi - \beta$. Применом косинусне теореме на $\triangle SOB$, $\triangle SOD$, $\triangle SOA$ и $\triangle SOC$, редом, добијамо:

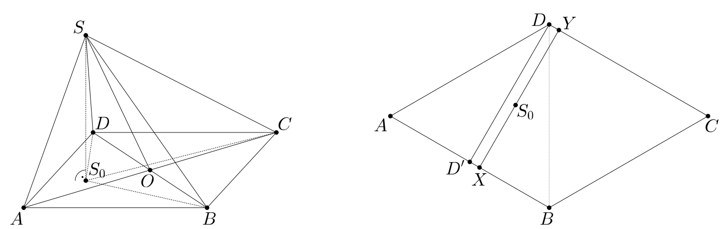
$$SB^2 = SO^2 + OB^2 - 2SO \cdot OB \cos\beta;$$
$$SD^2 = SO^2 + OD^2 + 2SO \cdot OD \cos\beta;$$
$$SA^2 = SO^2 + OA^2 - 2SO \cdot OA \cos\alpha;$$
$$SC^2 = SO^2 + OC^2 + 2SO \cdot OC \cos\alpha.$$

Сабирањем прве две једнакости и друге две једнакости, уз уврштавање $OB = OD = \frac{a}{2}$, $OA = OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $SA = a$, добијамо $SB^2 + SD^2 = 2SO^2 + \frac{a^2}{2}$ и $a^2 + SC^2 = 2SO^2 + \frac{3a^2}{2}$. Из друге једнакости следи $SC^2 = 2SO^2 + \frac{a^2}{2}$, па упоређивањем с првом добијамо $SB^2 + SD^2 = SC^2$.

Друго решење. Уведимо векторе $\vec{s} = \overrightarrow{AS}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$. Имамо $|\vec{s}| = |\vec{b}| = |\vec{d}| = a$, као и $\vec{b} \cdot \vec{d} = a^2 \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$. Такође, $\overrightarrow{SB} = \vec{b} - \vec{s}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d} - \vec{s}$ и $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS} = \vec{b} + \vec{d} - \vec{s}$. Одатле:

$$SB^2 = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SB} = (\vec{b} - \vec{s}) \cdot (\vec{b} - \vec{s}) = \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{s} + \vec{s} \cdot \vec{s} = 2a^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{s};$$
$$SD^2 = \overrightarrow{SD} \cdot \overrightarrow{SD} = (\vec{d} - \vec{s}) \cdot (\vec{d} - \vec{s}) = \vec{d} \cdot \vec{d} - 2\vec{d} \cdot \vec{s} + \vec{s} \cdot \vec{s} = 2a^2 - 2\vec{d} \cdot \vec{s};$$
$$SC^2 = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SC} = (\vec{b} + \vec{d} - \vec{s}) \cdot (\vec{b} + \vec{d} - \vec{s}) = 3a^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{d} - 2\vec{b} \cdot \vec{s} - 2\vec{d} \cdot \vec{s} = 4a^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{s} - 2\vec{d} \cdot \vec{s}.$$

Дакле, како десне стране прве две једнакости у збиру дају десну страну треће, то важи и за леве стране, чиме је тврђење доказано.



Ок 2018 3Б 4

Треће решење. Нека је S_0 подножје нормале из темена S на раван $ABCD$. Тада имамо $SB^2 = SS_0^2 + S_0B^2$, $SC^2 = SS_0^2 + S_0C^2$ и $SD^2 = SS_0^2 + S_0D^2$, па се једнакост коју треба доказати своди на $SS_0^2 + S_0B^2 + SS_0^2 + S_0D^2 = SS_0^2 + S_0C^2$, тј.

$$SS_0^2 + S_0B^2 + S_0D^2 = S_0C^2.$$

Нека је a дужина странице ромба $ABCD$ (а тада имамо и $SA = a$). Такође, нека су X и Y подножја нормала из тачке S_0 на праве AB и CD, редом. Радићемо случај када се S_0 налази између тачака X и Y (у супротном се ради слично). Нека је D' подножје висине из D у једнакостраничном $\triangle ABD$. Приметимо, $AX+CY=AD'+D'X+CY=AD'+DY+CY=\frac{a}{2}+a=\frac{3a}{2}$. Сада можемо рачунати:

$$\begin{aligned} SS_0^2+S_0B^2+S_0D^2 &= (SA^2-AS_0^2)+(S_0X^2+XB^2)+(S_0Y^2+YD^2)\\ &= a^2-(AS_0^2-S_0X^2)+(a-XA)^2+S_0Y^2+(a-YC)^2\\ &= a^2-AX^2+a^2-2aXA+XA^2+S_0Y^2+a^2-2aYC+YC^2\\ &= 3a^2-2a(XA+YC)+(S_0Y^2+YC^2)=3a^2-a\cdot 3a+S_0C^2=S_0C^2, \end{aligned}$$

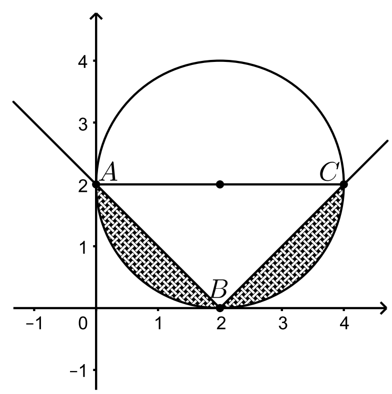
што је и требало доказати.

5. Изразе под кореновима можемо записати као $x(x+3)+1$ и $y(y-1)+3$. Одатле, за ма какве целе бројеве x и y, ови изрази су непарни (јер су производи $x(x+3)$ и $y(y-1)$ парни, будући да им је увек један чинилац паран а други непаран).

Означимо $x^2+3x+1=a$ и $y^2-y+3=b$. Имамо $\sqrt{a}+\sqrt{b}=2017$, тј. $\sqrt{a}=2017-\sqrt{b}$. Квадрирањем ове једнакости добијамо $a=2017^2-4034\sqrt{b}+b$, тј. $\sqrt{b}=\frac{2017^2+b-a}{4034}$. Одавде видимо да је $\sqrt{b}$ рационалан број, а пошто је b цео број, из ова два закључка следи да је и $\sqrt{b}$ цео број. На исти начин доказујемо и да је $\sqrt{a}$ цео број. Међутим, како су a и b непарни бројеви, то су и $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ непарни бројеви, али у том случају је $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ паран број, па овај збир не може бити једнак 2017, контрадикција. Дакле, полазна једначина нема целобројна решења.

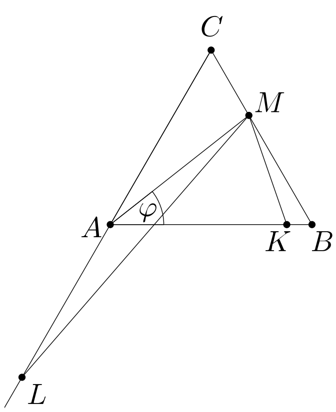
Четврти разред – Б категорија

1. Прва неједначина се своди на $x^2-4x+4+y^2-4y\leqslant 0$, тј. $(x-2)^2+(y-2)^2\leqslant 4=2^2$. Скуп тачака које ово испуњавају представљају круг с центром у $(2,2)$ и полупречника 2. Друга неједначина се своди на $y\leqslant\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$; дакле, посматрана фигура представља део малочас описаног круга који се налази испод графика функције $y=|x-2|$, тј. састоји се од два кружна одсечка (видети слику). Ако обележимо тачке $A(0,2)$, $B(2,0)$ и $C(4,2)$, сада лако видимо да се тражена површина може израчунати одузимајући од половине површине круга површину једнакокрако-правоуглог $\triangle ABC$ (чија је катета једнака $2\sqrt{2}$), тј. износи $\frac{\pi\cdot 2^2}{2}-\frac{(2\sqrt{2})^2}{2}=2\pi-4$.



Ок 2018 4Б 1

2. Имамо $24^a+2^b+2018^c\equiv 2^b+2^c\equiv(-1)^b+(-1)^c \pmod 3$ и $10^c+3^a+2018^b\equiv 1^c+2^b\equiv 1+(-1)^b \pmod 3$. Дакле, други број је дељив са 3 ако и само ако је b произвољан паран број. Сада, користећи да је b паран број, видимо да је први број дељив са 3 ако и само ако је c непаран број. Дакле, тражени услов испуњавају све тројке (a,b,c) где је a произвољан природан број не већи од 2018, b произвољан паран број не већи од 2018, и c произвољан непаран број не већи од 2018. Према томе, таквих тројки има $2018\cdot 1009\cdot 1009=2\cdot 1009^3$.



Ок 2018 4Б 3

3. *Прво решење.* Тражена једнакост се може трансформисати у $MB\cdot MC=(AB-AM)(AB+AM)$, тј. $\frac{MB}{AB-AM}=\frac{AB+AM}{MC}$. Означимо са K тачку на страници AB такву да важи $AK=AM$, а са L тачку на продужетку странице AC преко тачке A такву да важи $AL=AM$. Тада се жељена једнакост своди на $\frac{MB}{BK}=\frac{CL}{MC}$. Дакле, довољно је доказати сличност $\triangle MBK\sim\triangle LCM$.

Означимо $\measuredangle BAM=\varphi$. Тада имамо $\measuredangle MAC=60^\circ-\varphi$. Како је $\triangle ALM$ једнакокрак а његов спољашњи угао код темена A износи $60^\circ-\varphi$, следи $\measuredangle AML=\measuredangle ALM=30^\circ-\frac{\varphi}{2}$. У $\triangle MLC$ имамо још $\measuredangle LCM=60^\circ$, па налазимо и трећи угао: $\measuredangle LMC=180^\circ-(30^\circ-\frac{\varphi}{2})-60^\circ=90^\circ+\frac{\varphi}{2}$. Како је $\triangle AKM$ једнакокрак и угао наспрам основице износи φ, следи $\measuredangle AKM=\measuredangle AMK=90^\circ-\frac{\varphi}{2}$, одакле директно добијамо $\measuredangle BKM=90^\circ+\frac{\varphi}{2}$. Дакле, како за $\triangle MBK$ и $\triangle LCM$ важи $\measuredangle LMC=90^\circ+\frac{\varphi}{2}=\measuredangle BKM$ и $\measuredangle LCM=60^\circ=\measuredangle MBK$, следи $\triangle MBK\sim\triangle LCM$, што је и требало доказати.

Друго решење. Означимо $a=AB=AC=BC$. Применом косинусне теореме на $\triangle ABM$ добијамо: $AM^2=a^2+BM^2-2a\cdot BM\cos 60^\circ=a^2+BM^2-a\cdot BM$. Одатле имамо $a^2-AM^2=a\cdot BM-BM^2=BM\cdot(a-BM)=MB\cdot MC$, што је и требало доказати.

4. а) Одговор: није могуће.

Сви могући збирови који се могу појавити у врстама и колонама су следећи: $-3,-2,-1,0,1,2,3$. Како се, по услову задатка, мора јавити шест различитих збирова, то се тачно један од ових 7 бројева неће појавити као збир (а сви остали ће се појавити тачно по једном). Приметимо, даље, да рачунајући суму свих тих шест збирова који се појављују, заправо сваки број у таблици рачунамо по два пута (једном у његовој врсти, други пут у његовој колони), па та укупна сума мора бити паран број. Како на горњој листи могућих збирова имамо 4 непарна и 3 парна броја, да би сума неких 6 од тих 7 бројева била парна, следи да број који се не појављује мора бити паран.

Дакле, збир неке врсте или колоне мора бити једнак 3, и збир неке врсте или колоне мора бити једнак -3. Без умањења општости, нека је збир бројева у првој врсти једнак 3, тј. у првој врсти су све јединице. Сада, очигледно, ни у једној колони не можемо имати збир -3, па се збир -3 мора појавити у некој врсти; нека је то, без умањења општости, друга врста, тј. у другој врсти су сви бројеви једнаки -1. Дакле, у свакој колони засад имамо збир 0, па да би (након уписивања бројева у трећој врсти) сва ова три збира била различита, у трећој врсти морају бити различити бројеви, тј. бројеви 1, 0 и -1 (сваки по једном). Међутим, тада збир бројева у трећој врсти износи 0, а такође у једној колони имамо збир $1+(-1)+0=0$, контрадикција.

b) Одговор: могуће је. Приказујемо једно такво попуњавање таблице.

1	1	1	1
1	1	1	-1
1	0	-1	-1
0	-1	-1	-1

Ок 2018 4Б 4

5. Решења посматране једначине су нуле полинома $f(x)=x^3-3x-a$. Како је овај полином трећег степена, он има највише 3 реалне нуле. С обзиром на $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ и $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, а како је полином непрекидна функција, следи да $f(x)$ мора имати бар једну нулу. Извод ове функције је $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$, па како извод има нуле у тачкама $x=-1$ и $x=1$, негативан је на интервалу $(-1,1)$, а позитиван иначе, закључујемо да $f(x)$ расте на интервалима $(-\infty,-1)$ и $(1,\infty)$, опада на $(-1,1)$, има локални максимум за $x=-1$, а локални минимум за $x=1$. На сваком од интервала $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ и $(1,\infty)$ полином $f(x)$ може имати највише по једну нулу, због монотоности на тим интервалима. Полином ће имати укупно три различите реалне нуле ако и само ако важи $f(-1)>0$ и $f(1)<0$ тј. $2-a>0$ и $-2-a<0$, имаће две различите реалне нуле (од тога једну двоструку) ако и само ако важи $f(-1)=0$ или $f(1)=0$, а иначе (тј. ако и само ако су вредности $f(-1)$ и $f(1)$ различите од 0 и међусобно истог знака) само једну реалну нулу.

Дакле, посматрана једначина има три различита реална решења за $a\in(-2,2)$, два различита реална решења за $a\in\{-2,2\}$, а само једно реално решење за $a\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$.